ANALYSIS II

Dr. D. Pitteloud

Themen:

0. Stetigkeit (Ergänzungen)
1. Integralrechnung
2. Mehrdimensionale Analysis (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

0. Stetigkeit (Ergänzungen)

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$.

i) D heisst offen falls $\forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0$ mit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq D$.

ii) D heisst abgeschlossen falls $\mathbb{R} \setminus D$ offen ist.

iii) D heisst beschränkt falls $\exists M > 0$ mit $|x| \leq M\ \forall x \in D$.

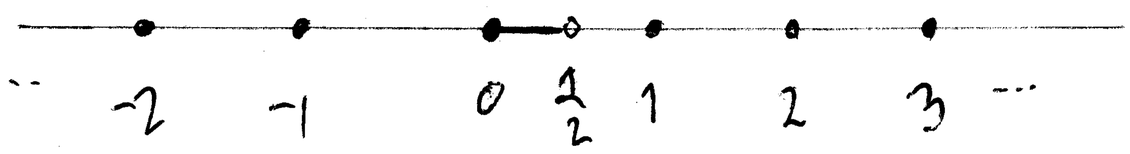
iv) D heisst kompakt falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiele:

- Für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ist $D_0 =]a, b[$ offen (s. Üb).
- $D_1 = [0, \infty[$ ist abgeschlossen und nicht kompakt. $[\mathbb{R} \setminus D_1 =$

$]-\infty, 0[$ ist offen]

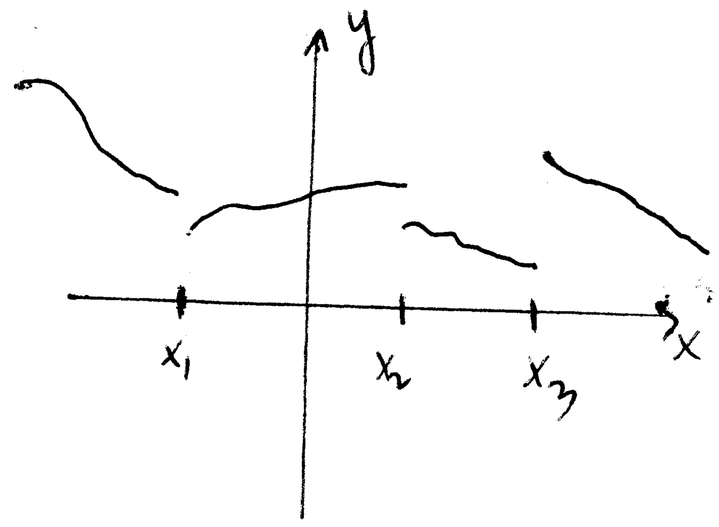
- $D_2 = [a,b]$ ist kompakt ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$).
- $D_3 = [0, \frac{1}{2}[\cup \mathbb{Z}$ ist nicht abgeschlossen [$\mathbb{R} \setminus D_3$ ist nicht offen denn $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus D_3$ aber $\frac{1}{2} - \delta \notin \mathbb{R} \setminus D_3 \ \forall \delta < \frac{1}{2}$].



Def: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$. f heißt stückweise stetig falls es endlich viele Punkte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ aus I gibt, sodass

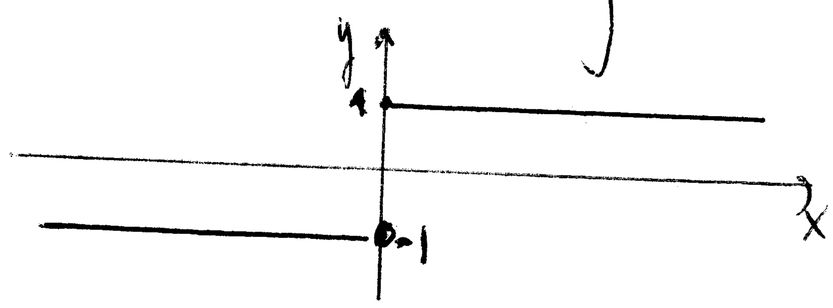
i) f ist stetig in jedem Punkt $x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

ii) $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x)$ existieren für $1 \leq k \leq n$.



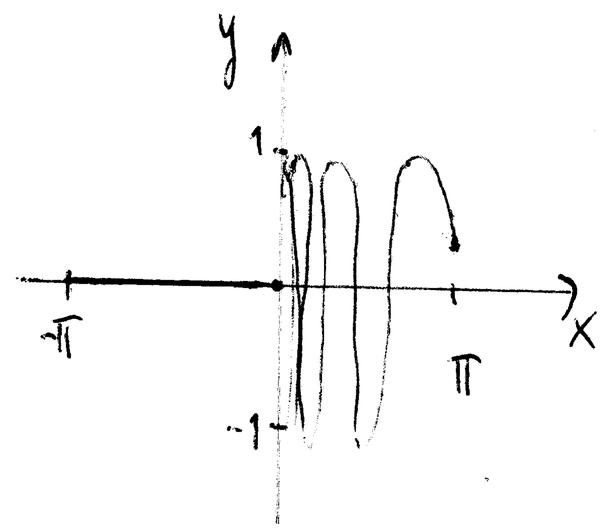
Beispiele: a) Jede stetige $f: I \to \mathbb{R}$ ist stückweise stetig.

b) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{"} \ x < 0. \end{cases}$



f ist stückweise stetig (aber nicht stetig).

c) Sei $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{"} \ -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existiert nicht $\Rightarrow$ f ist nicht stückweise stetig.

Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.

Def: a) f heißt stetig in $x_0 \in I$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ sodass } \forall x \in I \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

b) f heißt stetig falls f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

c) f heißt gleichmäßig stetig falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ sodass } \forall x, x_0 \in I \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

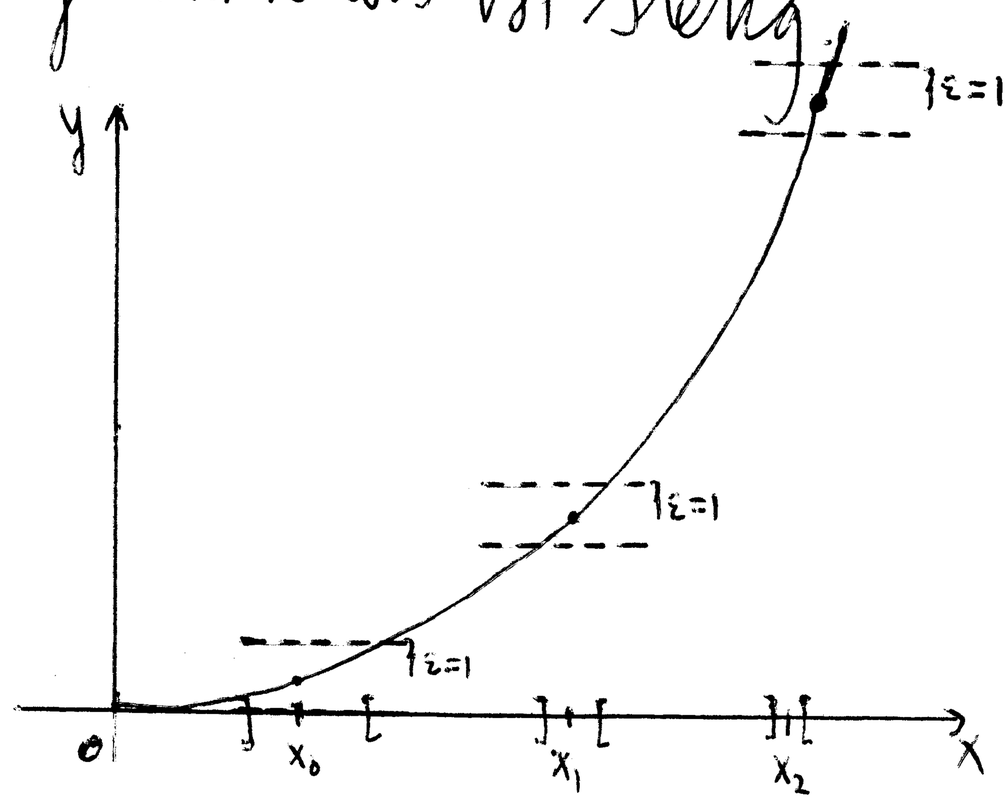
Bem: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

In a): $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. In c): $\delta = \delta(\varepsilon)$, d.h. δ hängt nicht von x_0 ab.

Beispiele: a) Jede gleichmäßige stetige Funktion ist stetig.

b) Sei $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Wir zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Ang. f ist gleichmäßig stetig.



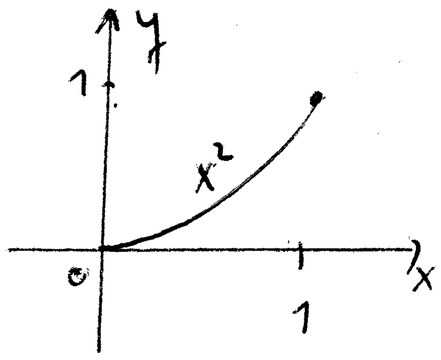
Sei $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ sodass $\forall x, x_0 \geq 0$ gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < 1$.

Sei $x_0 \geq 0$ beliebig und $x := x_0 + \delta/2$. $|x - x_0| = \delta/2 < \delta \Rightarrow |(x_0 + \delta/2)^2 - x_0^2| < 1$

$\Rightarrow x_0 \delta + \delta^2/4 < 1 \quad \forall x_0 \geq 0$. Widerspruch für $x_0 = 1/\delta$: $\frac{1}{\delta}\delta + \delta^2/4 = 1 + \delta^2/4 > 1$.

Also ist f nicht gleichmäßig stetig.

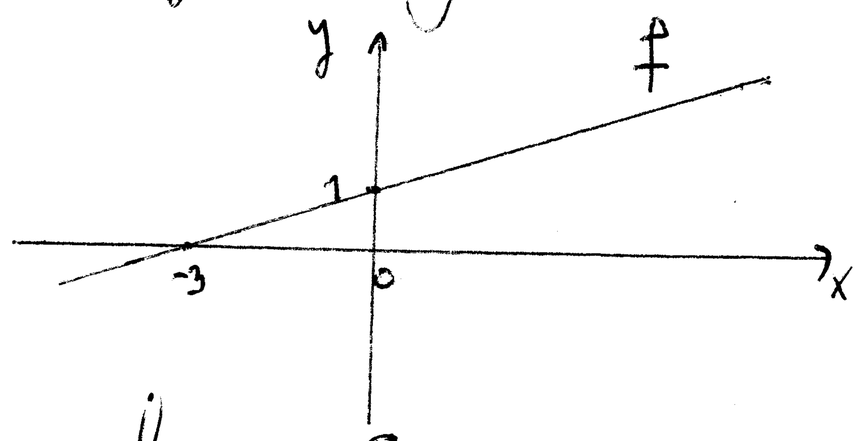
c) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.



4

Seien $x, x_0 \in [0,1]$. $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| =$
$|x - x_0| \cdot |x + x_0| = |x - x_0|(x + x_0) \leq 2|x - x_0|$.
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\delta := \varepsilon/2$. $x, x_0 \geq 0$ und $|x - x_0| < \delta = \varepsilon/2 \Rightarrow$
$|f(x) - f(x_0)| \leq 2|x - x_0| < 2\delta = \varepsilon$. f ist gleichmäßig stetig.

d) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$.



Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$. $|f(x) - f(x_0)| =$
$\left|\frac{1}{3}x + 1 - \left(\frac{1}{3}x_0 + 1\right)\right| = \frac{1}{3}|x - x_0|$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $\delta := 3\varepsilon$.
$x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $|x - x_0| < \delta = 3\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{3}|x - x_0| < \frac{1}{3}3\varepsilon = \varepsilon$. f ist gleichmäßig stetig.

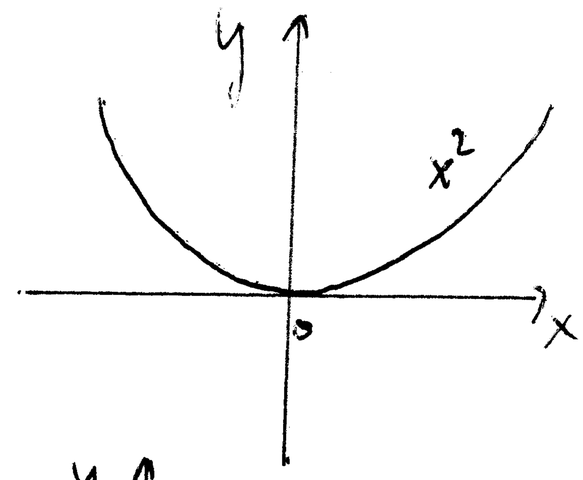
<u>Satz 0:</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

<u>Beweis:</u> Ang. f ist nicht gleichmäßig stetig. D.h.:
$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, x_0 \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. (1)
Sei $\varepsilon > 0$ wie in (1), ε fest. Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta_n = 1/n$ seien $x_n, x_n' \in [a,b]$
mit $|x_n - x_n'| \overset{(2)}{<} 1/n$ und $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$.
$x_n \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \overset{\text{Lem. 5.16b), Ana I}}{\Longrightarrow}$ es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (x_n) mit
$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$. Aus (2) folgt $\lim_{k \to \infty} x_{n_k}' = c$ $\left[|x_{n_k} - x_{n_k}'| < \frac{1}{n_k}\ \forall k \in \mathbb{N}\right]$.
f stetig in $c \Rightarrow \lim_{k \to \infty} (f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')) = f(c) - f(c) = 0$. Widerspruch mit
$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \geq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$. Also ist f gleichmäßig stetig. $\square$

Bem: Die Kompaktheit des Intervalls im Satz 0 ist notwendig:

Beispiele: i) I unbeschränkt.

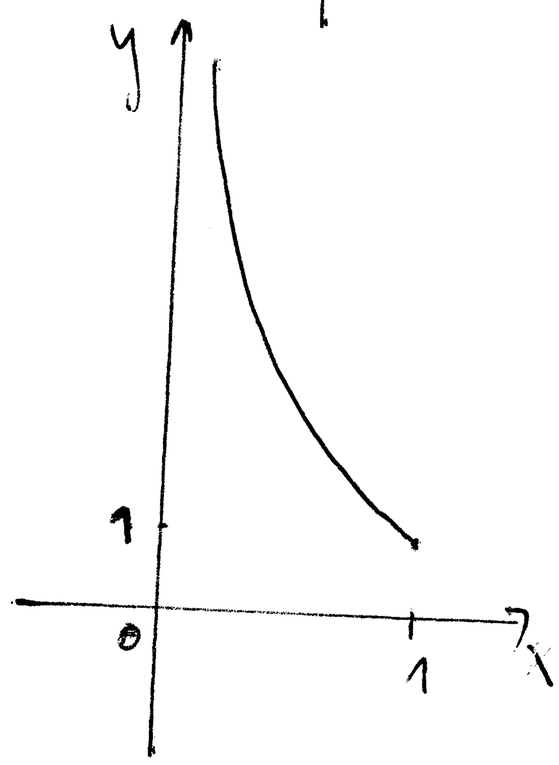
Sei $I = \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.



f ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig.

ii) I beschränkt.

Sei $I =]0,1]$ und $f:]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$.



f ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig. [s. Üb]